Linear-Time Dynamics using Lagrange Multipliers

David Baraff

**概要**

当前对铰接体（articulated figure）的线性时间模拟方法是基于约化坐标（reduced-coordinate）构架。这篇文章描述一般情况，非循环（non-iterative）线性模拟方法基于拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）。拉格朗日乘数方法对计算机图形应用是非常重要的，因为它避开了系统自由度参数化的困难问题。给不循环作用在两两物体间的n个约束方程，这个方法给出系统动力学的O(n)计算时间解。这个方法不依靠矩阵的Bandwidth，这样也不需要假设约束的拓扑结构。物体不需要是刚性的，约束能确定几个维度，并且不像约化坐标（reduced-coordinate）方法，不完全约束（例如：速度依赖约束）是允许的。附加的k维约束引起循环处理花费O(kn)。这实际上可以用它模拟复杂系统，有限封闭环铰链体和接触交互率。提供完整的例子实现的伪代码。

**介绍**

带约束前向模拟在计算机图形学中是一个关键。一个典型系统的约束是稀疏的：每个约束直接影响一个或两个物体（例如：几何连接约束）同时系统有n个物体，有O(n)个约束。在特殊情况，铰链体的模拟和机制在这种类别是失效的。稀疏约束系统也是两者之一近似或者完全非循环，例如：机器人武器通常是开环结构，作为人和动物的动画模型。有助于高效的模拟这些类型的系统。

读遍动力学文献，大量的动力学架构能被发现（牛顿-欧拉方程，Gibbs-Appel方程，达朗贝尔方程，高斯最小约束原理，等等）。但是这些变动物体的细节是少的。最终，我们将面对一个基本的选择：我们的模型用包含约化坐标来表述的系统状态（达朗贝尔方程，拉格朗日方程），还是引入附加的力来使系统保持约束。

一个约化坐标构架给出系统的自由度m，约束集消除c个自由度，参数化使用这剩余的n=m-c个自由度。通常约化坐标就是通常的广义坐标。坐标描述的原来m个自由度的系统叫做最大坐标系统。对一个任意的约束集，发现一个参数化m最大坐标系统的n维广义坐标描述是困难的。如果这样的参数化能被发现，计算瞬间n的广义坐标加速度需要O(n^3)的计算量。然而，不循环的铰接刚体是平凡参数化的，计算这n个广义坐标加速度在O(n)d的计算量，相比这要好。

对比，拉格朗日乘数法表达系统的状态使用简单的m维最大坐标系统。约束的实施是通过引入约束力（constraint forces）进入系统来实现的。在每一个瞬间，一个算法计算约束力，拉格朗日乘数（必须被计算）是一个在算法中描述约束力c梯度坐标的向量。拉格朗日乘数法是非常重要的对于计算机交互图形应用，因为它允许一个任意的约束进行组合。这是困难的（经常不可能）对于实现约化坐标架构。另外，拉格朗日乘数架构允许一个高模块化的设计，对于这些物体，约束，几何可以把其他的看成是一个黑盒节点。拉格朗日乘数法也允许我们去处理不完全约束，例如速度依赖约束。对这些系统约化坐标方法有固有的缺陷。

为了系统移出约束的c个自由度。拉格朗日乘数是c个线性方程的集合的c个未知变量。如果c是多与n，如此约束系统具有仅仅少量的自由度，明确的约化坐标的方法是首选。然而，这种情况

**4 拉格朗日乘数架构**

我们的目标是探讨物体，力，和约束“匿名”作为可能：我们希望假设最小结构，例如：我们可以有一个混合的物体类型（例如：刚体，刚体叠加）和几个维度的约束（例如：三维别针铰链）。

**4.1 符号**

上面我们介绍了少量的符号。第*i*个物体的维度表示为dim(*i*)这是物体不作约束的自由度个数。我们描述第*i*个物体的速度作为一个矢量。力施加在物体*i*上，也是一个在中的矢量。第*i*个物体的加速对力作出相应。

这里是一个dim(*i*)dim(*i*)均衡的正定矩阵描述第*i*个物体的质量属性。矩阵可以随时间变化根据物体的几何状态。然而，指示系统的全部速度，是相似的。（v的第*i*个元素）。类似的还有力，F=（作用在系统上的意思是作用在物体1上以此类推。给定如此的一个F，系统随时间的演化是：

（1）

这里M是一个块对角矩阵（block-diagonal matrix）

M=

约束的维度是从系统中移出的约束自由度的个数。我们已经说过，一个约束是用线性条件表示物体的加速度。如果第*i*个约束有维度m，然后约束表达为一个m维加速度条件：

（2）

每一个矩阵有*m*dim(*k*)维，是一个*m*长度的列向量，这里的0是*m*长度的零向量。这个方程的系数（矩阵和向量）依赖与物体和确切的约束细节，也依赖物体在当前瞬间

的位置和速度。在下一章节，我们需要每一个基本约束影响仅仅一对物体。意思是对每一个*i*的值，几乎矩阵的两个都为零，目前这个限制不重要。

**4.2 约束力**

约束为了实施这个加速度条件，约束力必须被引入到系统中。对于系统的基本约束，我们仅涉及这样的约束既无功约束力。在物理上定义无功约束是困难的，因为明确的时变约束函数增加系统的能量。大部分涉及这个问题的说法是无功约束力，真正的意思是“约束力是懒惰的”。所幸，这直觉概念有一个简单的数学描述：维护第*i*个约束是无功约束仅当施加在物体上的约束力满足

**（3）**

这里是一个m（第*i*个约束的维）维列向量。我们叫向量第*i*个约束的拉格朗日乘数。（如果第i个约束不能保持如此的力，它必须被处理为一个辅助的约束）考虑全部*q*个约束，我们转换到矩阵符号。我们能表达这*q*个多维加速度条件符合

（4）

如果我们定义

和

然后我们能将方程（4）简化为

（5）

在这个类似样式，我们组合单独的向量到进入一个大的向量=()。

从方程（3），我们看到向量乘上第i个的块列（block-column）。相应的，所有单个的约束力的和有构成。现在的问题是发现这个向量以便约束力，和一些外力（如万有引力）组合，产生满足约束的系统运动；

**5．方法**

这个架构通常被图形社团用于计算。列举如下，规定未知的约束力对物体起作用，表示已知的作用在系统上的外力（包括所有惯性速度依赖的力），从方程（1）我们得

求解，得：

（6）

这样，一旦我们计算出，我们将可以容易的计算出。从M是一个分块对角矩阵，是好的。代方程（6）进入方程（5），我们得

如果定义矩阵A和向量b

和

然后我们能表达作为下面方程的解

（7）

这个构架有一个描述属性数。第一，假设J有满秩（相当，强迫约束没有冲突和多余）而且是均衡的正定的，A是好的，注意活节式构造物，J自动是满秩,当前的几何构型是独立的。

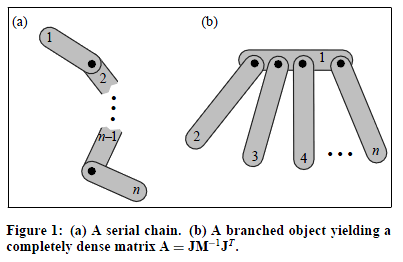
由于A不是很大，我们可以直接计算，在特别的情况，当A是非奇异的，楚列斯基分解是一个好方法为了计算。当A变的更大，迭代方法能被用来解方程（7），矩阵A是一个明确的稀疏矩阵，或者使用这个方法可以工作在稀疏要素的J和。In discussing the sparsity of **A.**我们把A作为一个块矩阵，这个块有M和J定义。

这里，我们限制一个约束仅施加在两个物体上。考虑方程（2），给定值i的意思是，J的第i行仅两个元素是非零的。如果约束i作用在物体r和s，仅和是非零的。怎么去传送这种稀疏到矩阵A？从A的定义，第ij个A的块是

什么时候是非零的？每一个是非零，仅仅存在k使是非零。从方程（2），意思是必定存在一个物体*k*受约束*i*和*j*的影响。

连续铰链紧紧地限制矩阵系统。假如n个顺序连接的铰链（图1a），我们看到如果，是零。因此，我们能平凡的使用a banded solution method在O(n)时间解。然而，如果我们有分叉的结构，这样A不是banded，我们能发现一些一般方法去开发A的稀疏？回答是no，因为A不需要稀疏在全部情况！

考虑这样一个结构，约束1施加在物体1和2上，约束2施加在物体1和3上，一直这样（如图1b）。矩阵A对于这个结构没有稀疏在全部情况。其实，A是完全稠密的，因为每一个约束作用在物体1上有（如：乘积对于所有的对i和j是非零）。就矩阵的计算方法而言我们必须放弃发掘稀疏。



**6 一个稀疏架构**

矩阵A是一个方阵，这里是所有约束的维数的和。取代通过矩阵A计算，考虑矩阵方程

（8）

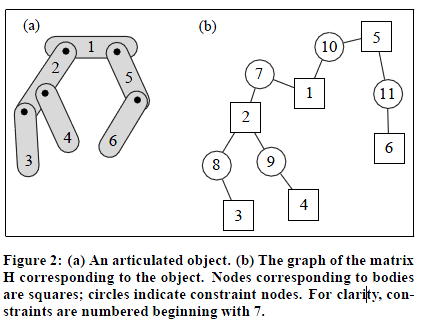
第一行产生，或者等效的，。代入下面的行并且都乘-1产生

这就是方程（7）。这样，我们能计算通过解方程（8）中的（虽然y是不需要的副产品）。让我们定义方程（8）中的矩阵

这个架构被经常看到在机器人学和工程资料中。使用H有助与我们清晰的分割运动方程（矩阵的上面一行）和约束条件（矩阵的下面一行），很显然直接通过方程（8）去计算是很愚蠢的，*使用稠密矩阵方法*。使用技术，方程（7）是容易解的，因为A比H小，也因为A是正定的，H不是。然而，当我们从稀疏出发点考虑问题时，这显然方程（8）比方程（7）优，因为H总是稀疏的。在下一部分，我们描述一个简单的求解过程通过解方程（8）。

**7 一个稀疏解决方法**

因我们的算法是基于H图的属性。The *graph* of a square symmetric *s* block by *s* block matrix **H**

is an undirected graph with *s* nodes.对于，两节点i和j中间有一条边如果是非零的。（H的对角元素总是作为非零元素，但是他们不在图中产生边）

因为约束的连接是无环的，H图也是无环的。因此，H图是一个。例如，考虑一个如图2a的结构，矩阵J和约束集表示如下

产生矩阵

这个图由H定义（看图2b）。

我首先解方程（8）通过计算楚列斯基分解，这里L是一个低价三角。遗憾的，这不工作因为这个H的右下角是0，是的H不明确的。因此，我们因数H作为是一个特征矩阵，且D是一个块对角矩阵。我然后解这个系统，抽出部分就相当与。尽管H总是稀疏的，我们必须变序H成为一个稀疏(sparsity)。

**7.1 变序**